Blanca Margarita Parra Mosqueda
Mayo de 2015

La educación matemática hoy en los niveles medio superior y superior

Resumen:
Durante siglos, el modelo de educación matemática en los bachilleratos y las universidades, ha permanecido sin alteraciones en la mayor parte de los sistemas educativos. Generalmente, las propuestas se han centrado en la transmisión de conceptos, procedimientos y reglas, desarrollándose de manera lineal, conforme las tablas de contenido de los libros de texto. Este documento cuestiona ese modelo y su pertinencia en los tiempos que corren, apoyándonos en los resultados de la didáctica de las matemáticas que se han venido recopilando y replanteando desde las década de los 70's y con vistas al desempeño profesional y en la vida de los alumnos que dejan el bachillerato o terminan una licenciatura, con todas las opciones intermedias. ¿Dónde estamos y hacia dónde quisiéramos avanzar?

Durante siglos, el modelo de educación matemática en los bachilleratos y las universidades, ha permanecido sin alteraciones en la mayor parte de los sistemas educativos. Generalmente, las propuestas se han centrado en la transmisión de conceptos, procedimientos y reglas, desarrollándose de manera lineal, conforme las tablas de contenido de los libros de texto.

Este modelo, vigente en muchos sistemas educativos dentro y fuera de este país, sigue los pasos de la propuesta contenida en los *Elementos* de Euclides, pensado como libro de texto. Sin embargo hay que recordar que en esos libros se trata de construir lógicamente, de manera deductiva, el conocimiento desarrollado hasta la época de su publicación. La aritmética y la geometría eran dos de los componentes del quadrivium, parte del programa de estudios delineado por Platón en *La República*. Se trataba de vehicular el pensamiento lógico deductivo a través de esa instrucción. En la época medieval el conocimiento de estos temas permitía acceder al grado de bachiller, prerrequisito para estudiar Medicina, Leyes o Teología.

En tanto los conocimientos requeridos de un alumno no variaran, no aparecieran nuevos tópicos, nuevas metodologías, nuevas herramientas, el modelo seguía siendo válido. Lo que actualmente se denomina "educación clásica" es un esquema que recupera e incluye estos temas pero que incorpora elementos de los siglos XV al XX, como son el álgebra, la geometría analítica y el cálculo, necesarios para el desarrollo industrial en los siglos XIX y XX, tomando en cuenta que lo que se denomina la Primera Revolución Industrial se podría situar a finales del siglo XVIII concluyendo hacia mediados del siglo XIX, mientras que lo que se puede llamar Segunda Revolución Industrial partiría desde mediados del siglo XIX hasta principios del siglo XX (hacia 1914). Algunos sistemas educativos, como el nuestro, siguen anclados en ese esquema.

En una entrevista para ABC[1], en España, Richard Gerver[2], menciona algunas de las características de la educación que deberían de estar presentes en las escuelas modernas. Lo que

[1] Pérez-Barco, C. "El Sistema Educativo Español Está Anclado En La Era Industrial". *ABC.es*., 2014. Web. 24 May 2015.

comenta respecto al sistema educativo español puede aplicarse de manera pertinente a nuestro propio sistema educativo. En particular, señala que el sistema educativo español:

> *Está caduco. De hecho, está anclado en la era industrial. No es efectivo para el mundo de hoy, donde se necesitan empleados creativos y capaces de pensar por ellos mismos. El sistema español, donde solo se enseña y se controla, no tiene sentido.*

Los cuestionamientos a los sistemas educativos, a los métodos de enseñanza y a los contenidos de los programas no son nuevos. A mediados del siglo pasado, los matemáticos europeos de renombre incursionaron en el análisis y reformulación de los programas de estudio de matemáticas a niveles medio y superior. Durante el coloquio de Royaumont en 1959, organizado por lo que ahora es la OCDE, Dieudonné lanzó el famoso grito de guerra de: *à bas Euclide!* (abajo Euclides). Lo que cuestionaba y fustigaba era la enseñanza excesiva de la geometría del triángulo en el bachillerato y en la universidad. Aducía que no tendría que haber habido lugar para la jerga, el dogmatismo, la introducción temprana de la axiomática:

> *Solamente se puede desarrollar fructíferamente una teoría matemática bajo la forma axiomática cuando el estudiante ya está familiarizado con el asunto al que se aplica, trabajando durante un cierto tiempo sobre una base experimental, o semi-experimental, es decir recurriendo constantemente a la intuición.*[3]

Se desencadenó una necesidad de reformar la enseñanza de las matemáticas, encabezada por el grupo Bourbaki del que Dieudonné formaba parte. Pero ya en 1974, <<siendo uno de los padres de la reforma, Dieudonné tuvo que denunciar públicamente una nueva escolástica, "*forma aún más agresiva y estúpida colocada bajo la bandera del 'modernismo'*." Así pueden ser las reformas cuando se sacan con fórceps, esencialmente, y sin tiempos de experimentación real en las clases (como ocurrió en la década de 1970).[4]>>

Matemáticos como Borel se unieron a los reclamos:

> *Todos los cambios de los programas deben necesariamente fracasar, o al menos tener apariencias de fallar, por la sencilla razón de que la masa de los maestros no puede obtener de golpe una técnica pedagógica tan buena para los nuevos materiales como la técnica tradicional lo era para los anteriores. Pero la contraparte de esta constatación pesimista no es menos precisa: si bien es cierto que lo esencial en la enseñanza es menos*

---

[2] Richard Gerver. *Crear hoy la escuela del mañana: la educación y el futuro de nuestros hijos*. Ediciones SM, 2012.
Nota bene: Las traducciones libres son mías, a partir de los textos citados.
[3] Claude Lelièvre. *L'Express.fr*.""Dieudonné: "A Bas Euclide!"". 2009. Web. 22 May 2015.
[4] Claude Lelièvre. Op. Cit.

> *el programa que el método, todo cambio de programas debe, en definitiva, dar buenos resultados después de que hemos sido capaces de crear nuevos métodos adecuados para el nuevo material*.[5]

Es en esa época que surge la Didáctica de las matemáticas (y de otras disciplinas) como campo de investigación formal, en la búsqueda de propuestas para acercar a los jóvenes al conocimiento y disfrute de las matemáticas como actividad, no como doctrina. Sin embargo, a pesar de los resultados de investigaciones en ese campo, acumulados en los últimos 45 años, no parece que tengamos avances sustanciales, al menos en este país.

Veamos, por ejemplo, un *Curso de matemáticas* fechado, por el alumno que lo utilizó, en 1850. Lamentablemente lo que queda del libro no permite conocer el nombre de autor ni del editor. Tampoco puede verse la tabla de contenidos, pero ésta puede reconstruirse hojeando el ejemplar:

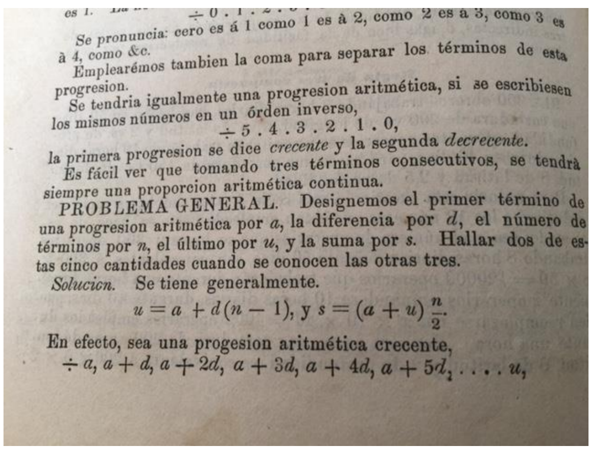
- **Aritmética**
    - Números decimales y fraccionarios, con cuidadosas explicaciones y ejemplos para el desarrollo de cada una de las operaciones.
    - Razones y proporciones
    - Sistemas de medidas
- **Algebra**
    - Terminología y el uso de símbolos
    - Operaciones con expresiones algebraicas
    - MCD
    - Ecuaciones
        - Primer grado con una incógnita
        - Primer grado con dos incógnitas (sistemas 2 x 2)
        - Primer grado con más de dos incógnitas (sistemas 3x3)
        - Aplicaciones a la resolución de problemas
        - Análisis de los casos en los que la resolución de un sistema de ecuaciones lineales conduce a fracciones cuyo denominador es cero.
    - Ecuaciones de segundo grado con una incógnita
        - El cálculo de la raíz cuadrada
        - Aplicaciones
    - Potencias fraccionarias de números y términos algebraicos
    - Aplicaciones
    - Proporciones, ahora con términos algebraicos
    - Logaritmos
- Suplemento a los elementos de algebra.
    - Progresiones
    - Regla de interés
        - Simple
        - Compuesto

[5] Claude Lelièvre. '*Le Blog De Claude Lelievre* . Blog Archive. « A Bas Euclide! ». 2009. Web. 22 May 2015.

    - Combinaciones y permutaciones
    - Binomio de Newton
- Geometría euclidiana
    - Geometría plana
        - Definiciones
        - Ángulos
        - Triángulos
            - Congruencia
        - Rectas perpendiculares y paralelas
        - Círculo y rectas en el círculo
        - Polígonos y sus propiedades
        - Proporciones y semejanza
        - Comparación de áreas de figuras semejantes
        - Problemas de aplicación
    - Geometría del espacio
        - Planos y sus intersecciones
        - Ángulos poliedros
        - Poliedros
        - Secciones de poliedros
        - Volúmenes de prismas y pirámides
        - Semejanza de poliedros
        - Cuerpos redondos y sus propiedades
            - Área
            - Volumen
            - Semejanza
        - Aplicaciones
        - Volúmenes de los cuerpos que constituyen las obras de fortificación
    - Nivelación
        - Aplicación de todo lo precedente
    - Trigonometría y levantamiento de planos
    - Teoremas y formulas de la trigonometría
        - Resolución de triángulos
            - Rectángulos
            - Oblicuos
            - Esféricos
        - Instrumentos para medir ángulos y líneas
            - Grafómetro
            - Circulo repetidor
            - Cadena métrica
        - Ejemplos de cálculos trigonométricos
            - Frentes de fortificación
            - Línea de defensa
            - Ángulo flanqueado
    - Levantamiento de planos
        - Determinación de los principales puntos de un país
            - Operación de detal
        - Planos levantados con la plancheta

- Declinatorio
  - Planos levantados con la brújula
  - Planos levantados con la espada de agrimensor
  - Resumen de estos métodos

El nivel de los desarrollos no es trivial, como puede verse en estas fotos:



Se pronuncia: cero es á 1 como 1 es à 2, como 2 es à 3, como 3 es à 4, como &c.

Emplearémos tambien la coma para separar los términos de esta progresion.

Se tendria igualmente una progresion aritmética, si se escribiesen los mismos números en un órden inverso,

$$\div 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 0,$$

la primera progresion se dice *crecente* y la segunda *decrecente*.

Es fácil ver que tomando tres términos consecutivos, se tendrà siempre una proporcion aritmética continua.

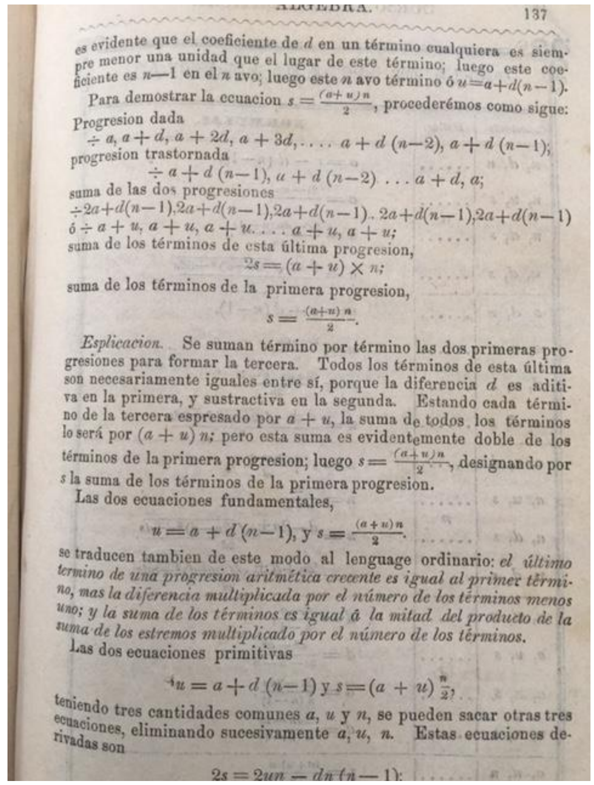
PROBLEMA GENERAL. Designemos el primer término de una progresion aritmética por a, la diferencia por d, el número de términos por n, el último por u, y la suma por s. Hallar dos de estas cinco cantidades cuando se conocen las otras tres.

Solucion. Se tiene generalmente.

$$u = a + d(n-1), \text{ y } s = (a+u)\frac{n}{2}.$$

En efecto, sea una progesion aritmética crecente,

$$\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \ldots u,$$



ALGEBRA. 137

es evidente que el coeficiente de d en un término cualquiera es siempre menor una unidad que el lugar de este término; luego este coeficiente es $n-1$ en el n avo; luego este n avo término ó $u=a+d(n-1)$.

Para demostrar la ecuacion $s=\frac{(a+u)n}{2}$, procederémos como sigue:

Progresion dada

$$\div a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+d(n-2), a+d(n-1);$$

progresion trastornada

$$\div a+d(n-1), a+d(n-2) \ldots a+d, a;$$

suma de las dos progresiones

$$\div 2a+d(n-1), 2a+d(n-1), 2a+d(n-1) \ldots 2a+d(n-1), 2a+d(n-1)$$

$$\text{ó} \div a+u, a+u, a+u \ldots a+u, a+u;$$

suma de los términos de esta última progresion,

$$2s = (a+u) \times n;$$

suma de los términos de la primera progresion,

$$s = \frac{(a+u)n}{2}.$$

Esplicacion. Se suman término por término las dos primeras progresiones para formar la tercera. Todos los términos de esta última son necesariamente iguales entre sí, porque la diferencia d es aditiva en la primera, y sustractiva en la segunda. Estando cada término de la tercera espresado por $a+u$, la suma de todos los términos lo será por $(a+u)n$; pero esta suma es evidentemente doble de los términos de la primera progresion; luego $s=\frac{(a+u)n}{2}$, designando por s la suma de los términos de la primera progresion.

Las dos ecuaciones fundamentales,

$$u = a + d(n-1), \text{ y } s = \frac{(a+u)n}{2}.$$

se traducen tambien de este modo al lenguage ordinario: *el último termino de una progresion aritmética crecente es igual al primer término, mas la diferencia multiplicada por el número de los términos menos uno; y la suma de los términos es igual á la mitad del producto de la suma de los estremos multiplicado por el número de los términos.*

Las dos ecuaciones primitivas

$$u = a + d(n-1) \text{ y } s = (a+u)\frac{n}{2},$$

teniendo tres cantidades comunes a, u y n, se pueden sacar otras tres ecuaciones, eliminando sucesivamente a, u, n. Estas ecuaciones derivadas son

$$2s = 2un - dn(n-1);$$

La tipografía y la distribución del espacio no respetan ninguna de las características de orden pedagógico que se suelen sugerir (tipo de letra, ilustraciones, aire) esencialmente porque, en la época, no se disponía de las ventajas actuales para la edición. A cambio, quien esto escribió se preocupó por ser muy claro en cada una de las discusiones y cada uno de los ejemplos desarrollados, en aras de lograr de los estudiantes la mayor comprensión y de incrementar las posibilidades de éxito al poner en uso algunos de los conceptos o metodologías.

El asunto es que un curso actual de Precálculo no es muy diferente de este texto, en cuanto a programa de estudios. Desde el sucinto *Precalculus Mathematics in a Nutshell*, de Simmons, hasta el voluminoso *Precálculo*, de Stewart, los contenidos básicos son los mismos. Lo que nos venden son ediciones mejoradas en cuanto a la presentación y el diseño, y con muchos temas que nunca serán tocados en el curso ni utilizados por la mayor parte de los alumnos, en su vida.

Seguimos insistiendo en que el alumno aprenda cada uno de los métodos que la tradición juzga valiosos, sin importar si eso es pertinente para la mayoría que simplemente utilizará las matemáticas como recurso necesario, pero de lo que prefieren prescindir, y para la minoría formada por los que quisieran ir más allá y se empantanan en un cálculo numérico que, en realidad, no les importa.

¿Cuál es o debiera ser la esencia de la educación matemática? Yo lo pondría en dos niveles:

- el de los alumnos que van a utilizar el conocimiento matemático como herramienta y lenguaje en sus tareas profesionales: albañiles y arquitectos, ingenieros de todo tipo, comerciantes y licenciados en comercio, mercadólogos, médicos, etc.
- el de los alumnos que irán a una área de ciencias, para desarrollar nuevos conocimientos o nuevas tecnologías, para los que la investigación será un quehacer disfrutable

Sin embargo, hacemos cursos estándares para responder a preguntas estándares que, de ninguna manera, benefician ni a unos ni a otros. Para ambos grupos, el conocimiento y la comprensión profunda de los conceptos serviría para ayudarlos a determinar las variables en un problema y establecer las relaciones entre ellas, dando lugar al planteamiento simbólico. Para los primeros, llegados a este punto, el uso de recursos tecnológicos y aplicaciones debería llevarlos a encontrar una solución para el problema planteado. Para los segundos, el descubrimiento de patrones, de clasificaciones de tipos de problemas, los ayudaría a buscar soluciones generales, creando así nuevo conocimiento.

Desde mi punto de vista lo que hay que construir dentro de un curso de matemáticas es ese conjunto de actitudes, habilidades y conocimientos que definen lo que se llama **la competencia matemática** y que deberíamos desarrollar en los alumnos. Apoyarlos para adquirir una disposición hacia las matemáticas, la cual depende de los siguientes componentes:

- Conocimiento bien organizado y flexiblemente accesible
- Métodos heurísticos, traducidos en estrategias de búsqueda para analizar problemas
- Meta conocimiento, que involucra el conocimiento acerca del propio funcionamiento cognitivo y el conocimiento acerca de las propias motivaciones y emociones
- Convicciones positivas relacionadas con matemáticas
- Habilidades de autorregulación de los propios procesos cognitivos y habilidades para regular los procesos y actividades volitivas[6]

El dominio integrado de las cinco componentes, dice De Corte, debería resultar en el desarrollo de esta disposición para el aprendizaje y el pensamiento experto, la cual involucra el desarrollo de una sensibilidad para identificar situaciones donde es relevante y apropiado utilizar el conocimiento y las habilidades, y una inclinación para hacerlo.

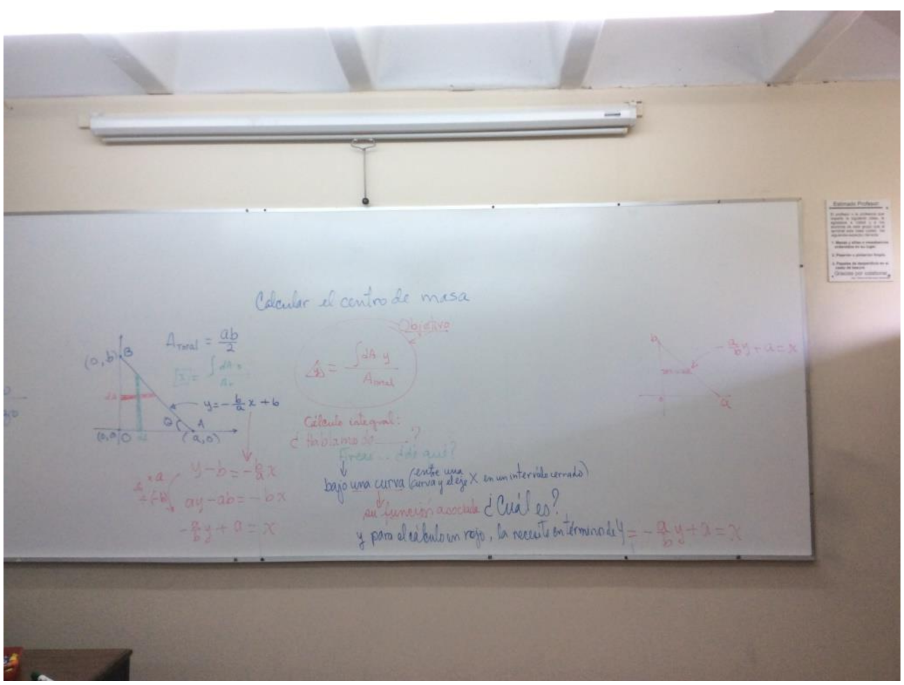
[6] De Corte, Erick. Learning from instruction: the case of mathematics. *Learning Inquiry*, (2007) 1:19–30. Springer.

De Corte habla también de una **competencia adaptativa** que tendrían que adquirir los estudiantes, la cual se traduce en una habilidad para aplicar procedimientos aprendidos significativamente de manera flexible y creativa y es opuesta a la **competencia rutinaria** que consiste, principalmente, en la habilidad para resolver ejercicios de clase de manera precisa y rápida sin entender mucho lo que se trata, y que es justamente donde se centran los esfuerzos de muchos de los docentes.

La competencia adaptativa se considera ahora como el fin último de la educación matemática, precisa De Corte. Es importante, si no necesaria, con vistas a la adquisición de <u>la habilidad para transferir las habilidades y conocimientos </u>propios a nuevas tareas y nuevos contextos de aprendizaje. Y en este momento, esa es una tarea urgente.

A pesar de todo lo anterior, la enseñanza de las matemáticas, en México, sigue respondiendo a ese afán de saturar de hechos, de fórmulas, de procedimientos, de mnemotecnias y de recetas a los alumnos.

Nos sigue pareciendo un objetivo importante que el alumno sea capaz de utilizar series de Riemann para calcular integrales definidas, por ejemplo, en lugar de que sepa cuándo y para qué necesita el concepto de integral, saber plantear una integral cuando se requiera, y ser capaz de resolverla utilizando una aplicación o algún software. Al final no saben ni para qué sirven ni cómo calcularlas. La siguiente foto muestra la secuencia de preguntas que fui creando para ayudar a los alumnos de un curso de Física para Ingeniería en nanotecnología y en ingeniería biomédica a establecer los elementos conceptuales y procedimentales para calcular un centroide:



En la década de los 70, el surgimiento de los CCH hizo suponer que llegarían vientos de cambio a nivel medio superior. En la actualidad, los profesores que participaron en su fundación lamentan que se haya convertido en una prepa más, sin diferencias ni de forma ni de fondo. Las pocas habilidades de lectura y de razonamiento de los egresados de las secundarias producen programas de estudio de nivel remedial en los bachilleratos, un alto índice de deserción y, para los que llegan a las universidades, con honrosas excepciones, limitantes serias para una formación de calidad.

Hace casi 200 años, en 1829, Evaristo Galois había denunciado la pésima calidad de la enseñanza a nivel bachillerato, en su país. *Se enseña a los jóvenes a pasar exámenes*, dijo, señalando el contubernio entre los profesores y los editores de los libros de texto, en Francia, en su época. Seguimos en eso: ENLACE, PISA, CENEVAL, etc. dictan lo que los alumnos deben aprender con el triste resultado de que al terminar los estudios, particularmente los que abandonan la escuela en algún momento, no pueden ni saben cómo hacer uso de lo que supuestamente aprendieron. El mismo Gerver, al que nos referimos al principio menciona, en la entrevista para ABC que:

> *Si las escuelas tienen* ***pasión y confianza*** *por lo que hacen, pueden desarrollar el sistema que más se ajuste a sus necesidades. No hay un único método. Aunque compartan algunas características, cada país es único y diferente y debe encontrar lo que funciona para él. Lo que ya no funciona es el sistema educativo que entrena para aprobar exámenes.*[7] (El subrayado es mío).

Y añade:

> *No se trata solo de adquirir conocimientos. Es absolutamente necesario que aprendan a* ***resolver problemas,*** *a pensar por sí mismos, a colaborar, a* ***trabajar en equipo,*** *a saber adaptarse a los cambios de forma permanente. Y, sobre todo, a no sentarse a escuchar, sino a* ***seguir aprendiendo conceptos por su cuenta.*** *Las capacidades más importantes que un joven puede tener son las habilidades personales.*[8]

Pero para los alumnos, en general, un curso es bueno si "lo pasa", de preferencia con altas notas. Los profesores, particularmente en instituciones privadas, se someten a la evaluación que hacen de ellos los alumnos, sacrificando en ocasiones la calidad de los aprendizajes por los puntos de la encuesta de satisfacción, so pena de no ser recontratados. Los padres de familia siguen creyendo que las notas obtenidas hablan de: 1) la calidad de la institución educativa y 2) la inteligencia y buena preparación de sus hijos. Las instituciones utilizan esos puntajes que obtienen los alumnos para 1) conservar la matrícula y 2) generar los indicadores que significan acreditaciones y fondos. En apariencia, todos ganan.

[7] Pérez-Barco, C. Artículo citado.
[8] Pérez-Barco, C. Artículo citado.

Sin embargo el desarrollo tecnológico ha hecho que ese tipo de conocimiento enciclopédico sea obsoleto y que las altas notas en esos cursos no sean significativas en un mundo laboral que exige muchos *know how*. Yo dudo de que, profesionalmente, alguien realmente se ponga a imitar a Newton haciendo tablas detalladas para calcular algo que en Excel se hace de manera muy sencilla y rápida. De la misma manera, dedicar un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a que un alumno aprenda a calcular a mano menos de lo que el Wolfram Alpha hace en minutos, me parece una pérdida de tiempo que podría emplearse en habilitarlo para utilizar las herramientas en la solución de problemas reales, generando pensamiento crítico y creativo.

Por supuesto, el rol del docente tendría que cambiar. Y terminaría el papel preponderante de los libros de texto en lo que llamamos educación. Nuestras seguridades al dar clase y hacer que los alumnos aprendan a contestar de manera preestablecida tendrían que dar paso a un quehacer de colaboración e investigación activa, lleno tal vez de incertidumbres. La pérdida del control, que a veces no es tan caro, sería una consecuencia. Y tal vez por eso seguimos haciendo lo mismo que aprendimos de nuestros profesores (los míos eran otra cosa, aclaro).

Pero hay otras maneras de hacer las cosas. Perrenoud dice que el uso de la estrategia didáctica del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP o PBL), a nivel universitario, ni siquiera debería cuestionarse. El acercamiento a ese tipo de trabajo puede comenzar desde la escuela primaria, por supuesto. Y hay que aclarar que lo que define a un problema depende del grado y el desarrollo de los alumnos.

En ese sentido voy a comentar brevemente acerca del uso de *Desmos* para generar aprendizajes sobre las cónicas, como lo plantee y desarrollé en un curso de Geometría Analítica (Matemáticas IV) en el Colegio del Bosque, en León.

Una vez que habíamos construido la ecuación ordinaria de la circunferencia, a partir de un problema propuesto, se les pidió hacer un dibujo creativo en *Desmos* utilizando rectas y circunferencias, como tarea. Las preguntas (vía *Edmodo*) comenzaron a llegar: "¿podemos usar otro tipo de curvas?". No solamente aprendieron a graficar otras curvas y a establecer las ecuaciones ordinarias correspondientes (viendo la galería de dibujos en *Desmos* o los videos en el canal de Desmos en YouTube) sino que, además, aprendieron a colorear utilizando desigualdades y a limitar dominios y rangos. Al terminar cada etapa de dibujos teníamos una sesión de institucionalización de los aprendizajes generados, muy en el estilo de las dialécticas de Brousseau.

Hablando solamente de cursos de/que requieren de matemáticas, una de las experiencias más ricas la tuve con los alumnos de Análisis Numérico en la Ibero Tijuana, en 2011. Alumnos muy interesados, participativos y colaborativos. El curso tuvo como soporte un grupo cerrado en Facebook. Las discusiones, las aportaciones, los problemas que se les propusieron para generar los aprendizajes requeridos, están en las publicaciones del grupo. Todos los alumnos de ese curso son exitosos ingenieros graduados. El grupo está ahora abierto para que sea visible públicamente y puedan ser reutilizados los materiales.

Tal vez lo que hace falta es integrarnos a grupos de discusión sobre los programas de estudio actuales, en todos los niveles, para colaborar en una investigación seria, no pensada para solamente hacer puntitos para el SNI, acerca de los conocimientos, habilidades y actitudes que el estudiante mexicano debiera generar y poner a prueba al terminar cada ciclo escolar. A nivel superior, determinar las competencias profesionales que son requeridas del egresado de cada carrera, y replantear los planes de estudio y las metodologías de aprendizaje que ayuden a desarrollar esas características en ellos.

Es una invitación.